مجلة كلية العلوم الإدارية، جامعة الرياض، م ٧، ص ص ٥٥ - ٧٠ (٧٩ - ١٩٨٠).

استخدام متسلسلات ماركوف ذات حواجز الامتصاص في حساب تدفقات الطلاب في بعض مراحل التعليم مع التطبيق على المملكة العربية السعودية

الدكتور أحمد عودة عبدالمجيد عودة

أستاذ مساعد، قسم العلوم المالية والرياضيات، كلية العلوم الإدارية، جامعة الرياض، الرياض، المملكة العربية السعودية.

تحاول هذه المقالة إظهار أهمية متسلسلات ماركوف في مجال تخطيط التعليم، حيث يمكن استخدام هذه المتسلسلات في حساب تدفقات الطلاب في المراحل التعليمية المختلفة بعد حساب مصفوفة الانتقال للطلاب والتي سوف نوجد أوجه الشبه بينها وبين مصفوفة الانتقال للجزيء الذي يتحرك بين حاجزي الامتصاص في متسلسلات ماركوف. وسوف نلاحظ أن حركة انتقال الطالب بين الصفوف الدراسية المختلفة تشبه تماما حركة الجزيء في هذه المتسلسلات. وبالتالي فإن هذه المتسلسلات يمكن أن تفيد كثيراً في تحليل النظام التعليمي بصفة عامة وفي دراسة تدفقات الطلاب بصفة خاصة.

وقد طبق الباحث هذا على بعض بيانات التعليم في المرحلتين المتوسطة والثانوية بالمملكة العربية السعودية، حيث تم حساب مصفوفة انتقال الطلاب بين الصفوف المختلفة في المرحلتين، وكذلك تقدير أعداد الخريجين لبعض السنوات التي توفرت بياناتها للباحث.

متسلسلات ماركوف Marcov Chains

تفترض هذه المتسلسلات وجود سلسلة من التجارب أو المحاولات المتتابعة Consecutive trials مرقمة .. $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ وأن نتيجة التجربة أو المحاولة رقم n تكون

متغيراً عشوائيا متقطعاً X_n يأخذ القيم .. $0, 1, \ldots, j, \ldots$ أو أن نتائج أي محاولة يمكن النظر إليها على أنها مجموعة الحوادث . $E_1, E_2, E_3, \ldots$ وهذه الحوادث تكون متنافية متبادلة شاملة . لذلك فإن :

$$P_r \{ X_n = j \} = P_j^{(n)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

هي احتمال وقوع الحدث E_j في المحاولة رقم n . أو هي احتمال أن المتغير العشوائي يأخذ القيمة j في المحاولة رقم n . كذلك فإنه يمكن النظر إليه على أنه احتمال أن النظام أو المجموعة the system سوف يكون في الوضع E_j في المحاولة رقم n . أي أن $E_1, E_2, E_3, \ldots$ هي الحالات أو الاوضاع المختلفة للنظام أو للمجموعة .

وبالتالي، فإذا كانت $X_n = j \, , X_{n-1} = i$ فإنه يقال إن المجموعة قد عملت نقلة a transition من الوضع i إلى الوضع j عند المحاولة رقم n . فإذا كانت المحاولات غير مستقلة، فإن هذا يعني أنه يجب معرفة :

$$P_r \{ X_n = j / X_{n-1} = i \, , X_{n-2} = h, \ldots, X_1 = a \} \ldots\ldots\ldots (2)$$

أما إذا كانت المحاولات مستقله فإن (1) ,(2) تكونان متطابقتين . والخاصية المميزة لتسلسلات ماركوف هي أن أي سلوك مستقبلي أو أي حركة مستقبلية لسلسلة المحاولات يعتمد فقط على الوضع الحالي وليس على الأوضاع الأسبق . أي أن :

$$P_r \{ X_n = j / X_{n-1} = i \, , X_{n-2} = h, \ldots, X_1 = a \}$$

$$= P_r \{ X_n = j / X_{n-1} = i$$

$$= P_{i\,j}^{(n)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

فإذا كانت $P_{i\,j}^{(n)}$ لا تتغير من محاولة إلى أخرى فإنه يقال إن هذه المتسلسلة من المحاولات المتتابعة متجانسة Homogenous .

وفي هذه الحالة يكون :

$$P_{i\,j}^{(n)} = P_{i\,j}$$

أي أن :

$$P_r \{ X_n = j / X_{n-1} = i \} = P_{i\,j} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

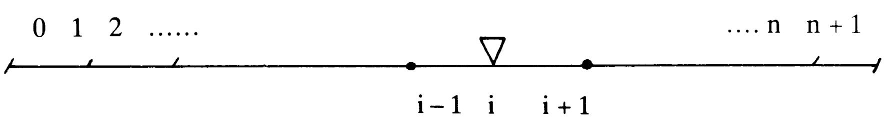
حيث أن $P_{i\,j}$ هي احتمال الانتقال من i إلى j . وهنا يلاحظ أن :

$$\sum_{j=1}^{k} P_{i\,j} = P_{i\,1} + P_{i\,2} + P_{i\,3} + \dots + P_{i\,k} = 1$$

فإذا كانت مجموعة الحوادث $(i = 1, 2, ..)$ E i محدودة finite وعدد عناصرها k فإن احتمالات الانتقال لمختلف قيم i , j يمكن أن توضع في مصفوفة P (تسمى مصفوفة الانتقال) كما يلي :

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \cdots\cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} \cdots\cdots & p_{2k} \\ . & & \\ . & & \\ p_{k1} & p_{k2} \cdots\cdots & p_{kk} \end{bmatrix}$$

فإذا فرض ـ كحالة خاصة أو كمثال [١] ـ أن جزيئا عشوائياً يتحرك تحت تأثير قوة معينة في اللحظات . . . , t, t + 1 . وأن الجزيء يمكن أن يكون في الأوضاع 0, 1, 2, ..., n, n + 1 حيث يوجد حاجزى امتصاص عند 0 , n + 1.



(١) د. أحمد عودة، «النماذج الإحصائية في تخطيط التعليم مع التطبيق على جمهورية مصر العربية» ـ جامعة القاهرة ـ كلية الاقتصاد والعلوم السياسية ـ قسم الاحصاء ـ مايو ١٩٧٤م .

Bermant, M.A., Semenov, L.K., Sylicki, V.N., «*Mathematical Models for Educational Planning*» Academic of Science SSSR, Central of Mathematical Economy Institute, 1972.

فإذا كان الجزيء في الوضع i فإنه في الحركة التالية إما أن ينتقل إلى الوضع $i + 1$ ، وذلك باحتمال $P_{i,i+1}$ أو أن يبقى في نفس الوضع i وذلك باحتمال P_{i+i} أو أن ينتقل إلى الوضع $i - 1$ وذلك باحتمال يساوى الصفر (أي حدث مستحيل) . وإذا كان الجزيء في الوضع 0 أو الوضع $n + 1$ فإنه يبقى في هذا الوضع باحتمال يساوى الواحد الصحيح . أي أن الوضعين n $1, 0$ يعبران عن امتصاص الجزيء، حيث:

$$P_{0,0} = P_{n+1\,,\,n+1} = 1$$

فروض أساسية حول نظام التعليم

بعد التعريف بمتسلسلات ماركوف ننتقل إلى الفروض الأساسية حول نظام التعليم وتحركات الطلاب بين الصفوف الدراسية المختلفة:

١ ـ نفترض أن الدراسة تتناول مرحلة تعليمية معينة (أي إحدى الكليات) .
٢ ـ نفترض أن عدد سنوات الدراسة بها هو n .
٣ ـ الطالب الذي ينهي الصف الدراسي i في نهاية السنة t ينتقل إلى الصف الدراسي $i + 1$ في بداية السنة $t + 1$
٤ ـ يمكن أن يبقى الطالب في نفس الصف i في بداية السنة $t + 1$.
٥ ـ يمكن أن ينسحب الطالب أو يستبعد لأى سبب في بداية السنة $t + 1$.
٦ ـ الطالب الذي ينهي الصف الدراسي n في نهاية السنة t يخرج من هذه المرحلة، أي يتخرج .
٧ ـ سنرمز لاحتمال انتقال الطالب من الصف الدراسي i إلى الصف الدراسي j بالرمز

حركة الطالب وحركة الجزيء

يمكن ـ الآن ـ اعتبار احتمال انتقال الطالب من الصف الدراسي j إلى الصف الدراسي j أي $P_{i,j}$ كاحتمال انتقال الجزيء من وضع إلى آخر (من i إلى j) . وحالة استبعاد الطالب كحالة امتصاص الجزيء عند الوضع 0 ، وتخرج الطالب كحالة امتصاص الجزيء عند $n + 1$. أي، بصفة عامه، يمكن النظر إلى حركة الطالب حتى يصل إلى الصف النهائي ويتخرج . كحركة الجزيء بين حاجزي الامتصاص . حيث يعبر الوضع 0 ـ كما ذكر ـ عن استبعاد الطالب من نظام التعليم، والوضع $n + 1$ عن تخرجه . وبالتالي يمكن حساب الاحتمالات المختلفة لانتقال الطالب بين الصفوف المختلفة ووضعها في مصفوفة مربعة تشبه تماماً مصفوفة انتقال الجزيء كما في متسلسلات ماركوف والتي تسمى اختصارا بمصفوفة الانتقال Transition Matrix.

مصفوفة الانتقـال

إذاً مصفوفة الانتقال لهذا النوع هي مصفوفة مربعة عناصرها عبارة عن احتمالات (أو نسب) الانتقال من وضع إلى آخر ويرمز لها بالرمز (P) وتأخذ الشكل التالي :

$$(P) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ P_{1,0} & P_{1,1} & P_{1,2} & P_{1,3} & \cdots & 0 \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ P_{n,0} & 0 & 0 & \cdots & P_{n,n} & P_{n,n+1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ويلاحظ على مصفوفة الانتقال ما يلي :

$$\sum_{j=0}^{n+1} P_{i,j} = 1 \rightarrow i = 0, 1, 2, \ldots, n+1$$

وهذا يعني أن مجموع أي صف من مصفوفة الانتقال يساوى واحد صحيح . ومن ذلك نجد أن :

$$P_{i,0} = 1 - \sum_{j=0}^{n+1} p_{i,j} \rightarrow i = 1, 2, \ldots, n$$

وكذلك :

$$p_{i,n+1} = 0 \rightarrow i = 1, 2, \ldots, n-1$$

حيث يمثل $P_{i,j}$ احتمال انتقال الطالب من i إلى j

، $P_{i,O}$ احتمال استبعاد الطالب بعدما يكون في الصف i أو هي نسبة الطلاب في الصف الذين يتركون الدراسة خلال هذه السنة .

، $P_{i,n+1}$ هي احتمال تخرج الطالب قبل وصوله إلى الصف **n** وواضح أنها تساوى صفر ، لأن الطالب لا بد أن يكمل الصف الدراسي **n** حتى يتخرج .

حساب عدد الطلاب في السنوات المختلفة

إذا استخدمت الرموز التاليــة :

$x(i, t)$ هي عدد الطـلاب النـاجحـين في الصف الـدراسي i في نهايـة السنة t والمقصود به عدد الطلاب الذى سينقل إلى الصف $i+1$ في بداية السنة $t+1$. أي أنها تساوى $x(i,i+1,t+1)$

$x(i-1, i, t)$ عدد الطـلاب المـوجـودين في الصف $i-1$ في السنة $t-1$ والمنقولين إلى الصف i في بداية السنة t .

$x(i, i, t)$ عدد الطلاب الذين كانوا في الصف الدراسي i في السنة $t-1$ وبقوا في نفس الصف i في بداية السنة t (أى الذين رسبوا) .

$y(i, t')$ عدد الطلاب المستبعدين من الصف الدراسي i في نهاية السنة t.

$z(i, t)$ عدد الطلاب المحولين من خارج الكلية (أو المرحلة) إلى الصف i في بداية t.

$u(i, t)$ عدد الطـلاب الـذين يتركـون الـدراسـة بسبب المرض أو الموت أو برغبتهم الشخصية وهم في الصف الدراسي i خلال السنة t .

$g(n, t')$ عدد المتخرجين من هذه المرحلة (من الصف n) في نهاية السنة t .

وإذا فرض أن تحويـل الطـلاب إلى الكليـة أو المـرحلة يكـون فقـط في الصف الـدراسي الأول أى $i = 1$.

فإنه يمكن حساب أعداد الطلاب في الصفوف المختلفة كما يلى :

$$x(1, t) = z(1, t) + x(1, 1, t) \quad \rightarrow \qquad (1)$$

$$x(i, t) = z(i, t) + x(i, i, t) + x(i-1, i, t) \quad \rightarrow \qquad (2)$$
$$i = 2, 3, \ldots, n$$

$$x(i, t') = x(i, t) - y(i, t') - u(i, t) - x(i, i, t') \quad \rightarrow \qquad (3)$$
$$i = 1, 2, \ldots, n-1$$

ويكون عدد الخريجين (من الصف الدراسي n) هو :

$$g(n, t') = x(n, t) - x(n, n, t') - y(n, t') - u(n, t) \quad \rightarrow \quad (4)$$

وبالتعويض عن x (i , t) من (1) ,(2) في (3) ,(4) نحصل على :

$$x(1, t') = z(1, t) + x(1, 1, t) + x(1, 1, t') - y(1, t') - u(1, t) \quad \rightarrow \quad (5)$$

$$x(i, t') = z(i, t) + x(i, i, t) + x(i-1, i, t) - x(i, i, t') - y(1, t') - u(i, t) \quad \rightarrow \quad (6)$$

$i = 2, 3, \ldots, n-1$

$$g(n, t') = z(n, t) + x(n, n, t) + x(n-1, n, t) - x(n, n, t') - y(n, t') - u(n, t) \quad (7)$$

وباستخدام المعادلات (1) ،(2) ،(7) - (5) يمكن تحديد عدد الطلاب في كل صف دراسي في نهاية السنة t .

حساب مصفوفة الانتقال

سوف نستخدم المعادلات السابقة في تحديد نسب (أو احتمال) الانتقال من i إلى i + 1 أي في حساب $p_{i, i+1}^{(t)}$
(الرمز t يعبر عن السنة) .

من التعريف :

$$p_{i, i+1}^{(t)} = x(i, i+1, t') / x(i, t) \quad \rightarrow \quad (8)$$

$i = 1, 2, \ldots, n-1$

$$;p_{i, i}^{(t)} = x(i, i, t+1) / x(i, t) \quad \rightarrow \quad (9)$$

ونفترض - للتبسيط - أن الخريجين من السنة النهائية n هم الذين ينتقلون من السنة n إلى n+1 . أي أن :

$$p_{n, n+1}^{(t)} = g(n, t') / x(n, t) \quad \rightarrow \quad (10)$$

وحيث ان الطالب الذي ينهي دراسته في الصف الدراسي i ينتقل إلى الصف الدراسي i+1 فإن العلاقة التالية صحيحة :

$$x(i, i+1, t') = x(i, t') \quad \rightarrow \quad (11)$$

ويلاحظ أيضا أن :

$$x(i-1, i, t) = x(i-1, t'-1) \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad \rightarrow \quad (12)$$

ومن (٨)، (١١) نحصل على :

$$p_{i, i+1}^{(t)} = x(i, t') / x(i, t) \quad (13)$$

ومن المعادلات السابقة يمكن كتابة :

$$p_{1,2}^{(t)} = \frac{z(1, t) + x(1, 1, t) - \dot{x}(1, 1, t'-1) - y(1, t') - u(1, t)}{z(1, t) + x(1, 1, t)} \rightarrow \quad (14)$$

$$p_{i, i+1}^{(t)} = \frac{z(i, t) + x(i, i, t) + x(i-1, t'-1) - x(i, i, t'-1) - y(1, t') - u(1, t)}{z(i, t) + x(i, i, t) + x(i-1, t'-1)} \rightarrow \quad (15)$$

$$p_{n, n+1}^{(t)} = \frac{z(n, t) + x(n, n, t) + x(n-1, t'-1) - x(n, n, t'-1) - y(n, t') - u(n, t)}{z(n, t) + x(n, n, t) + x(n-1, t'-1)} \quad (16)$$

$$p_{i, i}^{(t)} = \frac{x(i, i, t-1)}{z(i, t) + x(i, i, t) + x(i-1, t'-1)} \rightarrow \quad (17)$$

ومن العلاقات السابقة يمكن إيجاد نسب انتقال الطلاب من صف دراسي إلى آخر (وتشمل الرسوب والتخرج).

ويلاحظ في التخطيط قصير الأجل للتعليم أن مصفوفة نسب الانتقال تعتمد اعتماداً ضعيفاً على الزمن طالما لم يحدث تغير في هيكل نظام التعليم. لذلك نجد أن متوسط نسب الانتقال لعدد محدود من السنوات السابقة قد تختلف اختلافاً طفيفاً فقط عن نسب الانتقال لكل سنة على حدة (في التخطيط قصير الأجل).

فإذا فرض أنه خلال فترة خطة قصيرة لا يحدث تغيير في نظام التعليم سواء في سياسة القبول أو الانتقال أو نظم الامتحانات. . . وأن هذه الفترة طولها m من السنوات، وأن نسب الانتقال لهذه السنوات

$$p_{i,j}^{(t-m+1)}, p_{i,j}^{(t-m+2)}, \ldots, p_{i,j}^{(t)}$$

فتكون القيمة المتوسطة لنسب الانتقال هي الوسط الحسابي أو الهندسي لهذه النسب، أي أن :

$$P_{i,j}^{(t)} = \sum_{r=0}^{m-1} P_{i,j}^{(t-r)} / m$$

$$\text{or} \quad = \sqrt[m]{\prod_{r=0}^{m-1} P_{i,j}^{(t-r)}}$$

أما في حالة التخطيط طويل المدى (أو في حالة عدم التأكد)، فإن التغير في نسب الانتقال يعتمد إلى حد ما ـ بالإضافة إلى التغييرات في نظام التعليم نفسه ـ على عوامل خارجية، أي خارجة عن نظام التعليم. فالالتحاق في السنوات الأولى من التلعيم مثلا يعتمد على عوامل ديموجرافية. وكما أن ارتفاع الطلب على المفرقة يؤثر في هذه النسب. وفي هذه الحالات فإن نسب الانتقال قد تحدد باستخدام تحليل الانحدار حيث يمكن عن طريق معرفة نسب الانتقال لسنوات طويلة سابقة واستخدام طريقة المربعات الصغرى يمكن إيجاد العلاقة بين نسب الانتقال والزمن. ولكن هذا يلزمه الكثير من المعلومات لإظهار الاتجاه العام في تغير هذه النسب وحساب الخطأ العشوائي فيها. ويمكن النظر إلى قيم $P_{i\,j}^{(t)}$ على أنها متغيرات عشوائية ثم نوجد الارتباط بينها وبين $P_{i,1}^{(t-1)}$ فإذا توصلنا إلى العلاقة التي تربط بينها بدرجة عالية من الدقة أمكن التنبؤ بقيم نسب الانتقال في المستقبل.

استخدام مصفوفة الانتقال

بالإضافة إلى استخدام مصفوفة الانتقال في حساب تدفقات الطلاب بين الصفوف المختلفة، فإنها يمكن أن تستخدم في المجالات الآتية :

(١) حساب عدد الطلاب المستبعدين من الدراسة

فإذا استخدمنا الرموز السابقة نجد أن : $y(i, t) = x(i, t)\, p_{i,0}$

وإذا فرضنا أن متجه Vector الطلاب المستبعدين في الصفوف المختلفة هو $\overline{Y}(t)$ ، أي أن :

$$\overline{\overline{Y}}(t) = [\, y(1, t)\; y(2, t) \;\dots\; y(n, t) \,]$$

فإن $Y(t)$ يمكن التعبير عنها بالشكل التالي: $Y(t) = X(t) . P_y$

حيث P_y مصفوفة قطرية nxn عناصر قطرها الرئيسي $P_{i,0}$ وباقيء العناصر أصفار.

، $\overline{X}(t)$ هي متجه الطلاب في الصفوف المختلفة.

(٢) تقدير أعداد الخريجين

ويتم تقدير أعداد الخريجين بحساب نسب الانتقال للطلبة الذين التحقوا في الصف الدراسي الأول وخلال عدد n من السنوات ينهون دراستهم في هذه المرحلة (أي يتخرجون). وواضح أن هذه النسب تشبه نسب انتقال الجزيء من الوضع 1 إلى الوضع $n+1$ (أي وضع الامتصاص) خلال عدد n من الخطوات، وهذا الاحتمال هو العنصر $(1, n+1)$ من المصفوفة $(P)^n$.

ولإيجاد هذا العنصر، فلا بد من ضرب المصفوفة n من المرات. ويكون تقدير عدد الخريجين في هذه الحالة، إذا رمز له بالرمز $g(n, t+n-1)$، كمايلي:

$$g(n, t+n-1) = x(1, t)\, p^n_{1, n+1}$$

ويلاحظ أن التقدير السابق لأعداد الخريجين يهمل التحويل إلى الكلية أو المرحلة التعليمية محل الدراسة من كليات أو مراحل أخرى مناظرة.

كما لا يأخذ في الاعتبار إمكانية أو احتمال تخلف الطالب أي بقاءه في أحد الصفوف أكثر من عام دراسي واحد. فإذا أخذنا العنصرين السابقين في الحسبان عند تقدير عدد الخريجين فإنه يكون من اللازم حساب نسب الانتقال للطلاب الموجودين في السنوات $2,3,\ldots,n-1$ في جميع الصفوف الدراسية. أي أنه من اللازم معرفة:

$$p^2_{n, n+1}\ ;\ p^3_{n-1, n+1}\ ;\ \ldots;\ p^n_{2, n+1}\ ;\ p^{n+1}_{1, n+1}$$

ولهذه الاحتمالات لا بد من حساب المصفوفة P للفترات $2,3,\ldots,n, n+1$ ويؤخذ العنصر المقابل.

وبطبيعة الحال، سوف تختلف معادلة تقدير أعداد الخريجين بعض الشيء عن المعادلة السابقة، ولكن اهتمامنا في هذه المقالة منصب على المعادلة السابقة وهي التي سوف نستخدمها في التطبيق العملي على بيانات المملكة العربية السعودية.

التطبيق على بيانات المملكة العربية السعودية

وهنا يحاول الباحث حساب مصفوفة الانتقال لكل من المرحلتين المتوسطة والثانوية بالمملكة العربية السعودية اعتماداً على بيانات عامي **١٣٩٤/٩٣**هـ ، **١٣٩٥/٩٤**هـ وهي التي توفرت للباحث . ثم استخدام هاتين المصفوفتين في تقدير عدد الخريجين من كل مرحلة .

ويلاحظ هنا أن أعداد الطلاب المحولين من مراحل تعليمية أخرى إلى المرحلتين المتوسطة والثانوية يكاد يكون منعدماً أو يمكن إهماله ببساطة . وحيث أن كلا المرحلتين المتوسطة والثانوية تتكون من ثلاثة صفوف ، لذا فإن المصفوفة التي ستحسب لكل مرحلة تكون **٥** × **٥** أي تتكون من خمسة صفوف وخمسة أعمدة . ثم تحسب P^3 أي مكعب مصفوفة الانتقال ، وذلك لحساب احتمال تخرج الطالب من المرحلة بعد ثلاث سنوات من التحاقه بها . ثم يؤخذ العنصر $P^3_{1,4}$ (من المصفوفة المكعبة) ويضرب في $x(1,t)$ أي أعداد الطلاب الملتحقين بالصف الأول من المرحلة فنحصل على عدد المتخرجين من المرحلة بعد ثلاث سنوات من التحاق الطلاب بالصف الاول .

أولا : المرحلة المتوسطة

وباستخدام بيانات المرحلة المتوسطة في المملكة العربية السعودية في عامي **١٣٩٤/٩٣**هـ ، **١٣٩٥/٩٤**هـ للصفوف الأول والثاني والثالث المتوسط (الإعدادي) يمكن تكوين مصفوفة الانتقال داخل المرحلة المتوسطة (الإعدادية) والتي سيكون شكلها العام كما يلي :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{1,0} & p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} & p_{1,4} \\ p_{2,0} & p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} & p_{2,4} \\ p_{3,0} & p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} & p_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبحساب احتمالات او نسب الانتقال المختلفة بين الصفوف الثلاثة من بيانات السنتين المذكورتين نجد أن P تأخذ الشكل التالي :

$$
P = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & .182 & .818 & 0 & 0 \\
0 & 0 & .151 & .849 & 0 \\
0 & 0 & 0 & .106 & .894 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

ويلاحظ ان مجموع أي صف يساوى واحد صحيح (خصائص مصفوفة الانتقال) . وتكون P^2 كما يلي :

$$
P^2 = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.033124 & 0.272394 & 0.694482 & \\
0 & 0 & 0.022801 & 0.218193 & 0.759006 \\
0 & 0 & 0 & 0.011236 & 0.988764 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

والمصفوفة P^2 لها نفس الخصائص السابقة .

ونجد أن P^3 تأخذ الشكل التالي :

$$
P^3 = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.006028568 & 0.068226926 & 0.304877598 & 0.620866908 \\
0 & 0 & 0.003442951 & 0.042486507 & 0.954070542 \\
0 & 0 & 0 & 0.001191016 & 0.998808984 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

والمصفوفة P^3 لها أيضا نفس الخواص .

ونستطيع الآن تقدير أعداد الخريجين بأخذ العنصر $P^3_{1,4}$ أي العنصر $(1,4)$ من المصفوفة المكعبة والذي يساوى ٠,٦٢٠٨٦٦٩٠٨ في أعداد طلاب الصف الأول المتوسط (الإعدادي) . فإذا أخذنا أعداد طلاب الصف الأول المتوسط عام ٩٣/١٣٩٤هـ والذي يساوى ٣٠٥٣٥ يكون عدد المتخرجين بعد ثلاث سنوات أي في عام ٩٦/١٣٩٧هـ يساوى ١٨٩٥٨ طالبا . وبالمثل يكون عدد المتخرجين المتوقع عام ٩٧/١٣٩٨هـ يساوى ٢٣٧٢٦ طالباً وهو عبارة عن حاصل ضرب أعداد الطلاب في الصف الأول عام ٩٤/١٣٩٥هـ في احتمال تخرجهم بعد ثلاث سنوات وهو العنصر $P^3_{1,4}$ من المصفوفة كما سبق .

وهكـذا نستطيـع تقـديـر أعداد الخريجين من المرحلة المتوسطة لو توفرت بيانات عن أعداد الطلاب المقيدين بالصف الأول بالمرحلة .

وبـديهي ، فإنـه يمكن استخـدام مصفوفات الانتقال السابقة في حساب أعداد الطلاب في السنوات الدراسية المختلفة ، أي أن فائدتها لا تقتصر فقط على حساب اعداد الخريجين .

ثانيـا : المرحلة الثانويـة

وبـاستخـدام بيـانـات التعليم الثـانـوي في المملكـة العـربية السعودية في نفس العامين ١٣٩٤/٩٣هـ ، ١٣٩٥/٩٤هـ للصفـوف الأول والثـاني والثـالث الثـانـوي يمكن تكوين مصفـوفـة الانتقـال للمرحلة الثانوية والتي سيكون شكلها العام كما يلي (وهي خمسة صفوف وخمسة أعمدة أيضا) :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{1,0} & p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} & p_{1,4} \\ p_{2,0} & p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} & p_{2,4} \\ p_{3,0} & p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} & p_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبحساب احتمالات (أو نسب) الانتقال المختلفة بين الصفوف الثلاثة من بيانات السنتين المـذكـورتين، تأخذ P الشكل التالي مع ملاحظة أن خصائص مصفوفة الانتقال المذكورة سابقاً (كما ذكرها ماركوف) تنطبق تماما على هذه المصفوفة وكذلك المربع والمكعب :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .129 & .871 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .071 & .929 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .063 & .937 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ويكون مربع المصفوفة كما يلـي :

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.016641 & .174200 & .809159 & \\ 0 & 0 & .005041 & .124486 & .870473 \\ 0 & 0 & 0 & .003969 & .996031 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبالمثل يمكن الحصول على P^3 في الشكل التالي :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.002146689 & 0.026862511 & 0.212808817 & 0.758181983 \\ 0 & 0 & 0.000357711 & 0.012525707 & 0.987116382 \\ 0 & 0 & 0 & 0.000250047 & 0.999749953 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وللحصـول على أعـداد الخـريجـين نطبق نفس الطـريقة، أي نضرب أعداد الطلاب في الصف الأول الثانوي أي $x(1,t)$ في العنصر $P^3_{1,4}$ فنحصل على أعداد الخريجين بعد ثلاث سنوات من التحاقهم بالمرحلة .

ولما كان أعـداد الطـلاب فـي الصف الاول الثـانـوي عـام ٩٣/١٣٩٤هـ هـو ٨٨٣١ طالبـا والعنصر $P^3_{1,4}$ (من المصفوفة المكعبة) يساوي ٧٥٨١٨١٩٨٣, فإن عدد الخريجين المتـوقـع (أي الحاصلون على الثانوية العامة) في عام ٩٦/١٣٩٧هـ يساوي ٦٦٩٦ طالباً . وهكـذا يمكن تقـديـر أعـداد الطلاب الحاصلين على الثانوية العامه بعد ثلاث سنوات من التحاقهم بالصف الاول الثانوي .

وكذلك فإن عدد الخريجين المتوقع من هذه المرحلة عام ٩٧/١٣٩٨هـ يساوي ١٠٤٧٩ × ٧٥٨١٨١٩٨٣, يساوى ٧٩٤٥ طالبا .

وبنفس الطـريقـة يمكن تقـديـر أعـداد الخـريجين من أي مرحلة تعليمية مع مراعاة عدد سنـوات المـرحلة محل الـدراسـة . فإذا أردنـا ـ على سبيـل المثال ـ تقدير أعداد الخريجين من المـرحلة الابتـدائيـة بعـد ست سنـوات من التحـاق التـلاميذ في الصف الأول الابتدائي ، نحسب أولا مصفـوفـة الانتقـال بين صفـوف هذه المـرحلة P والتي ستكون ٨×٨ (أي ٨

صفوف ، ٨ أعمدة) ، ثم نحسب P^6 أي نضرب المصفوفة P في نفسها ٦ مرات ثم نأخذ العنصر $P^{6}_{1,7}$ ونضربه في أعداد التلاميذ في الصف الأول الابتدائي فنحصل على أعداد الخريجين بعد ست سنوات من التحاق التلاميذ في الصف الأول .

المراجـــع

عودة، أحمد (١٩٧٤) «**النماذج الإحصائية في تخطيط التعليم مع التطبيق على جمهورية مصر العربية**» ـ جامعة القاهرة ـ كلية الاقتصاد والعلوم السياسية ـ قسم الإحصاء ـ مايو.

وزارة المعارف (١٣٩٩) «**تطور التعليم في المملكة العربية السعودية ـ عرض إحصائي**» إعداد: مركز المعلومات الإحصائية والتوثيق التربوي .

Bermant, M.A., Semenov, L.K., Sylicki, V.N (1972) *"Mathematical Models for Educational Planning"*. Academic of Science SSSR, Central of Mathematical Economy Institute.

O.E.C.D. (1967) *"Mathematical Models in Educational Planning"*. Paris.

O.E.C.D. (1965) *"Economitric Models of Education"*.

O.E.C.D. (1967) *"Methods and Statistical Needs for Educational Planning"*, Paris.,

Sen, A.K.: "Models of Educational Planning and their Applications", *Journal of Development Planning,* No. 2, PP. 4 - 20.

Tinbergen, J. (1965) *"Econometric Models of Education"*, Paris, O.E.C.D.

Using Markov Chains in Estimating the Students Flows and the Graduate from some Levels of Education in Saudi Arabia

Dr. Ahmed Auda

College of Administrative Sciences, University of Riyadh, Riyadh, Saudi Arabia.

Education is one of the very important fields in which Markov Chain can be applied. These chains can be used in the field of education to estimate either the students flows in different classes of any level, or the graduates from this level.

Not only, but it can be used also to estimate the numbers of new entrants which will give a certain number of graduates after (n) Years. To do this the transition matrix of the students (P) is to be calculated. If, for example, we want to estimate the numbers of graduates from the secondary stage after three years, (P^3) is to be calculated, and then we take the element (1,4) from this matrix P^3. This element is to be multiplied by the numbers of the students in the first class of this stage (new entrants).

In this paper, the transition matrix of the students in the intermediate stage and also in the secondary stage are calculated, and then we estimated the numbers of graduates from the both stages in some years.