مجلة جامعة الملك سعود، م١٣، العلوم الإدارية (٢)، ص ص ٣٣٩-٣٥٦، الرياض (١٤٢١هـ/٢٠٠١م)

نحو تعميم علاقة جريفل لتركيب وتدريج بيانات جداول الحياة المختصرة

محمود بن حسين اليوسف

بقسم الأساليب الكمية، كلية العلوم الإدارية،
جامعة الملك سعود، الرياض، المملكة العربية السعودية

(قدم للنشر في ١٤١٩/٨/١٧؛ وقبل للنشر في ١٤٢٠/١٠/١٣هـ)

ملخص البحث. على الرغم من أهمية جداول الحياة المختصرة المركبة انطلاقا من البيانات الديمغرافية، إلا أنها لا تفي بجميع احتياجات الباحثين في مجال الديمغرافيا والحسابات الاكتوارية في دراساتهم عن المجتمع السكاني، لأن بيانات هذه الجداول موضحة فقط لفئات الأعمار (لكل خمس سنوات أو عشر سنوات) في حين يحتاج الباحثون في بعض دراساتهم إلى إعادة تبويب هذه البيانات في فئات عمرية أصغر من تلك التي نشرت فيها أساسا، كما قد يحتاجون إلى إعادة تبويبها لآحاد الأعمار. وفي هذه الحالات يلجأ الباحثون إلى تدريج بيانات جداول الحياة المختصرة.

يهدف هذا البحث إلى تعميم علاقة جريفل لتركيب جداول الحياة المختصرة بحيث تساعد العلاقة المعممة موضوع هذا البحث في تركيب جدول الحياة المختصر وتدريجه انطلاقا من معدلات الوفيات المركزية لفئات الأعمار التي يتم حسابها من بيانات التعداد العام للسكان وإحصاءات الوقائع الحيوية.

أخيرا قام الباحث بمقارنة النتائج التي توصلت إليها الدراسة مع نتائج الدراسات السابقة وذلك باستخدام الحاسب الآلي.

مقدمـــة

١- جداول الحياة وطرق تركيبها

إن جداول الحياة يمكن اعتبارها بمثابة نموذج نظري لتاريخ جيل من السكان يوضح عدد الوفيات التي تصيب أفراد هذه الجيل وأعداد الباقين منهم على قيد الحياة في الأعمار المختلفة. ويحتاج العاملون في المجالات الديمغرافية والحسابات الاكتوارية والتأمين لجداول الحياة لإيجاد الاحتمالات المختلفة المتعلقة بوفاة الأفراد أو بقائهم على قيد الحياة للأعمار المختلفة، وبالتالي استخدام هذه الاحتمالات بالأبحاث والدراسات السكانية التي يقومون بها. وهناك مصدران أساسيان للبيانات اللازمة لتركيب جداول الحياة وهي :

(أ) بيانات وإحصاءات شركات التأمين

وتتمثل في البيانات الإحصائية للمؤمن عليهم في إحدى شركات التأمين ولابد من أن يكون حجم هذه البيانات كبيرا ومتجانسا وغالبا ما تتعاون أكثر من شركة من شركات التأمين في تجميع البيانات الإحصائية اللازمة لتركيب جدول حياة لتستخدمه هذه الشركات في حساب أقساط التأمين.

(ب) البيانات الديمغرافية

وتتمثل في بيانات التوزيع العمري للسكان الناتجة عن التعداد العام للسكان بالإضافة إلى التوزيع العمري للوفيات الناتجة عن إحصاءات الوقائع الحيوية، وحيث إنه قد جرت العادة في معظم النشرات الإحصائية- سواء التي تصدرها الهيئات القومية أو الهيئات الدولية- على تبويب ونشر هذه البيانات بعد تجميعها بفئات عمرية خمسية (أو عشرية) لذلك فإن جداول الحياة الناتجة عنها تكون بياناتها موضحة فقط لفئات الأعمار وتدعى هذه الجداول بجداول الحياة المختصرة.

٢- تركيب جداول الحياة المختصرة

إن تركيب جداول الحياة المختصرة كان وما زال مثار اهتمام الباحثين مثل اليوسف [١]، كنج [٢]، وريد وميريل [٣] وجريفل [٤] وتتلخص الخطوات اللازمة لتركيب جداول الحياة المختصرة فيما يلي [٥ ، ص ٢٣]:

(أ) حساب معدلات الوفيات المركزية لفئات الأعمار

ونرمز عادة للمعدل الخاص بالفئة العمرية [x , x + n] بالرمز ($_nM_x$) وتحسب هذه المعدلات لجميع فئات الأعمار انطلاقا من بيانات التعداد العام للسكان وإحصاءات الوقائع الحيوية وندعوها معدلات الوفيات المركزية المشاهدة، وإذا استخدمنا الرمز ($_nm_x$) للتعبير عن معدلات الوفيات المركزية المماثلة لمجتمع جدول الحياة فإن الفرضية الأساسية التي نستند إليها في تركيب جدول الحياة المختصر هي [٦ ، ص١٠٤].

$$_nm_x = {_nM_x} \qquad (١)$$

(ب) تحويل معدلات الوفيات المركزية إلى احتمالات وفاة

وذلك باستخدام علاقة تربط بين احتمال الوفاة للفئة العمرية [x, x + n] والذي يرمز له بالرمز ($_nq_x$) والمعدل المركزي للوفيات داخل هذه الفئة العمرية أي ($_nm_x$) وتعتبر علاقة جريفل من أشهر هذه العلاقات [4] وهي :

$$_nq_x = n.\,{_nm_x}\left[1+\frac{n}{2}\,{_nm_x}+\frac{n^2}{12}\,{_nm_x}({_nm_x}-\ln c)\right]^{-1} \qquad (٢)$$

حيث : C قيمة ثابتة وجد بصورة تجريبيـــة أن قيمها واقعة بين ١,٠٨ و١,١٠ [٧، ص ٢٥٥] وبصورة عامة يمكن أن نختار لها القيمة المتوسطة التالية : [٨ ، ص٤٣] :

$$\ln c = 0.096 \qquad (٣)$$

(جـ) تركيب جدول الحياة المختصر باستخدام الصيغ الرياضية التي تحدد العلاقات بين أعمدة الجدول

وذلك بعد اختيار عدد افتراضي - يؤخذ عادة مائة ألف - لعدد الأحياء في العمر صفر، أي $\ell_0 = 100{,}000$ وهكذا نجد أن :

$$\ell_{x+n} = \ell_x(1-{_nq_x}) \qquad (٤)$$

حيث ℓ_x يرمز لعدد الأحياء عند تمام العمر (x) بينما (ℓ_{x+n}) يرمز لعدد الأحياء عند تمام العمر (x + n) وحيث $_nq_x$ تعطى بالعلاقة (٢) وهكذا فإن العلاقة (٤) تمكننا من تركيب جدول الحياة المختصر انطلاقا من معدلات الوفيات المركزية لفئات الأعمار.

٣- تدريج جداول الحياة المختصرة

إن العاملين في الدراسات المتعلقة بالمجتمع السكاني والباحثين في مجالات الديمغرافيا والحسابات الاكتوارية والتأمين يحتاجون لجداول الحياة لإيجاد الاحتمالات المختلفة المتعلقة بوفاة الأفراد أو بقائهم على قيد الحياة للأعمار المختلفة، وبالتالي استخدام هذه الاحتمالات في التقديرات والتنبؤات السكانية. وحيث إن جداول الحياة المختصرة لا تحوي جميع الأعمار وإنما حدود الفئات العمرية فقط (لكل خمس سنوات أو عشر سنوات) فإن الباحث يحتاج في كثير من الأحيان إلى إعادة تبويب البيانات في مجموعات عمرية أصغر من تلك التي نشرت فيها أساسا، أو أيضا إعادة تبويب هذه البيانات لآحاد الأعمار، إن تقدير عدد الأحياء للأعمار داخل الفئات العمرية وغير الواردة في الجدول الأساسي نسميه اصطلاح تدريج بيانات جدول الحياة. والطرق المستخدمة لهذه الغاية هي التالية:

(أ) التدريج البياني

إن التمثيل البياني لعدد الأحياء في جدول الحياة المختصر يعطينا نقاطا معزولة وإذا رسمنا منحنى بيانيا يمر بهذه النقاط يكون بمقدورنا تدريج بيانات جدول الحياة المختصر.

(ب) التدريج بحساب القيم المتوسطة

ويكون ذلك بحساب ℓ_{x+n} كقيمة تتوسط بعض القيم المجاورة لها من القيم الموضحة في جدول الحياة المختصر. وهكذا فإن طريقة مضروبات لاغرانج تفترض وجود ست قيم مجاورة وهناك جداول إحصائية تعطينا مضاريب لاغرانج المخصصة للقيمة المراد حسابها [٦، ص١١٢]، كما أن طريقة مضروبات سبراج تفترض وجود أربع قيم مجاورة، وهناك جداول إحصائية تعطينا مضاريب سبراج المخصصة للقيمة المراد حسابها [٥، ص٢٩٩].

(جـ) تدريج بيانات جداول الحياة المختصرة وفق صيغة معينة

ويكون ذلك بافتراض أن عدد الأحياء هو دالة في العمر وهذه الدالة تحتوى على معلمات يمكن تقديرها من بيانات جدول الحياة المختصر ومن أشهر الصيغ المستخدمة في هذا المجال صيغة كثيرات الحدود [٥، ص٣١١] وصيغة جومبيرتز [٦، ص١١٣].

(د) تعميم علاقة ريد وميريل لتركيب جداول الحياة المختصرة

أي باستخدام علاقة ريد وميرل المعممة في الدراسة [١].

إن هذا البحث يهدف إلى تعميم علاقة جريفل- العلاقة (٢)- المستخدمة في تركيب جداول الحياة المختصرة نظرا لأهمية هذه العلاقة وشهرتها في المجالات الديمغرافية حيث إنها تعتبر بحق العلاقة المنافسة لعلاقة ريد وميريل في هذا المجال. إن العلاقة التي يهدف هذا البحث إلى التوصل إليها يمكن استخدامها في تركيب جدول الحياة المختصر كما يمكن استخدامها أيضا في تدريج بيانات الجدول.

العلاقة الأساسية

إذا رمزنا للدالة المتصلة لعدد الأحياء عند العمر y بالرمز $\ell_{(y)}$- من أجل الأعمار الصحيحة x يكون $\ell(x) = \ell(x)$ - أي عدد الأحياء في جدول الحياة - فيمكننا استخدام مفكوك تايلور بأربعة حدود كالتالي:

$$\ell(y)=\ell(y_o)+(y-y_o)\ell'(y_o)+\frac{(y-y_o)^2}{2}\ell''(y_o)+\frac{(y-y_o)^3}{6}\ell'''(y_o) \qquad (٥)$$

وبما أن:

$$\ell'(y)=-\ell(y).\mu(y) \qquad (٦)$$

حيث μ (y) الدالة التي تعبر عن وطأة الوفاة في العمر y وتدعى بالمعدل الآني للوفاة في العمر y وباشتقاق العلاقة الأخيرة مرتين واستخدامها ثانية نجد أن:

$$\ell''(y)=\ell(y)\left[\mu^2(y)-\mu'(y)\right] \qquad (٧)$$

$$\ell'''(y)=-\ell(y)\left[\mu^3(y)-3\mu(y).\mu'(y)+\mu''(y)\right] \qquad (٨)$$

وبعد التبديل في العلاقة (٥) نجد أن:

$$\ell(y)=\ell(y_o)\left\{1-(y-y_o)\mu(y_o)+\frac{(y-y_o)^2}{2}\left[\mu^2(y_o)-\mu'(y_o)\right]\right.$$
$$\left.-\frac{(y-y_o)^3}{6}\left[\mu^3(y_o)-3\mu(y_o)\mu'(y_o)+\mu''(y_o)\right]\right\} \qquad (٩)$$

وبتبديل $y_o=x+\frac{n}{2}$ ، $y=x+k$ على اعتبار أن k و x أعـداد صحيحة واعتمـادا علـى القيـم التقريبية التالية [١]:

$$\mu(x+\tfrac{n}{2})\cong {}_nm_x$$

$$\mu'(x+\tfrac{n}{2})\cong {}_nm_x(l_n\,{}_nm_x)'$$

$$\mu''(x+\tfrac{n}{2})\cong 2\,{}_nm_x^2(l_n\,{}_nm_x)'$$

فإن العلاقة (٩) تصبح كما يلي :

$$\ell_{x+k}=\ell(x+\tfrac{n}{2})\Big\{1-(k-\tfrac{n}{2})\,{}_nm_x+\frac{(k-\frac{n}{2})^2}{2}\,{}_nm_x\big[{}_nm_x-(l_n\,{}_nm_x)'\big] -\frac{(k-\frac{n}{2})^3}{6}\,{}_nm_x^2\big[{}_nm_x-(l_n\,{}_nm_x)'\big]\Big\}\quad k=1,2,\ldots..n \tag{١٠}$$

ومن جهة أخرى فإنه إذا بدلنا في العلاقة (٩) $y=x$ ، $y_o=x+\frac{n}{2}$ واستخدمنا القيـم التقريبيـة السابقة فإننا نجد أن :

$$\ell_x=\ell(x+\tfrac{n}{2})\Big\{1+\tfrac{n}{2}\,{}_nm_x+\tfrac{n^2}{8}\,{}_nm_x\big[{}_nm_x-(l_n\,{}_nm_x)'\big] +\tfrac{n^3}{48}\,{}_nm_x^2\big[{}_nm_x-(l_n\,{}_nm_x)'\big]\Big\} \tag{١١}$$

وبقسمة (١٠) على (١١) نجد أن :

$$\ell_{x+k}=\ell_x(1-{}_kq_x)\quad ;k=1,2,\ldots n \tag{١٢}$$

حيث اعتبرنا أن :

$${}_kq_x=\frac{k.\,{}_nm_x\Big\{1+\frac{n-k}{2}\big[{}_nm_x-(l_n\,{}_nm_x)'\big]+\frac{4k^2-6kn+3n^2}{24}\,{}_nm_x\big[{}_nm_x-(l_n\,{}_nm_x)'\big]\Big\}}{1+\frac{n}{2}\,{}_nm_x+\frac{n^2}{8}\,{}_nm_x\big[{}_nm_x-(l_n\,{}_nm_x)'\big]+\frac{n^3}{48}\,{}_nm_x^2\big[{}_nm_x-(l_n\,{}_nm_x)'\big]} \tag{١٣}$$

وإذا ضربنا البسط والمقام في العلاقة (١٣) بالمقدار :

$$1-\tfrac{n^2}{24}\,{}_nm_x\big[{}_nm_x-(l_n\,{}_nm_x)'\big]$$

وإذا أهملنا الحدود الصغيرة من الرتبة الرابعة فما فوق فإنها تصبح على الصورة التالية :

$$ {}_kq_x \cong k\cdot{}_nm_x(1+Q)\left\{1+\frac{n}{2}\,{}_nm_x+\frac{n^2}{12}\,{}_nm_x\left[{}_nm_x-(l_n\,{}_nm_x)'\right]\right\}^{-1} \quad (١٤)$$

حيث اعتبرنا أن :

$$ Q=\frac{n-k}{2}\left(1+\frac{n-2k}{6}\,{}_nm_x\right)\left[{}_nm_x-(l_n\,{}_nm_x)'\right] \quad (١٥)$$

تعميم صيغة جريفل

١– اشتقاق صيغة جريفل من صيغتنا الأساسية

يعتبر جريفل [4] أن القيم التي يأخذها التركيب $(\ln{}_nm_x)'$ الوارد في العلاقتين (١٤) و(١٥) لا تتغير كثيرا لفئات الأعمار المختلفة وذلك في العديد من جداول الحياة ولذلك فيمكن إعطاؤه قيمة ثابتة.

وبصورة عامة إذا اعتبرنا أن :

$$ (l_n\,{}_nm_x)'=l_nc \quad (١٦)$$

حيث C معطاة بالعلاقة (٣) فإن العلاقة (١٤) تصبح عندئذ كما يلي :

$$ {}_kq_x \cong k\cdot{}_nm_x(1+R)\left[1+\frac{n}{2}\,{}_nm_x+\frac{n^2}{12}\,{}_nm_x({}_nm_x-l_nc)\right]^{-1} \quad (١٧)$$

حيث R تعطى بالعلاقة التالية :

$$ R=\frac{n-k}{2}\left(1+\frac{n-2k}{6}\,{}_nm_x\right)({}_nm_x-l_nc) \quad (١٨)$$

ولنلاحظ أنه بواسطة العلاقتين (١٢) و(١٧) يمكننا تدريج بيانات جدول الحياة المختصر في الفئة العمرية من x إلى x + n باستخدام المعدل المركزي للوفيات الخاص بهذه الفئة العمرية. وفي حالة خاصة فإن العلاقة (١٧) تنطبق على العلاقة (٢) من أجل k = n، أي أن علاقتنا (١٧) تعتبر تعميما لعلاقة جريفل (٢).

٢– مقارنة الصيغة المعممة (١٧) مع صيغة سابقة

لما كانت الصيغة (١٧) تفيدنا في تركيب وتدريج جداول الحياة المختصرة، وحيث إن المؤلف كان قد توصل في دراسة سابقة لمعالجة ذات الموضوع إلى الصيغة التالية [١]:

$$(19)\quad {}_k q_x^* = 1 - \exp\left[-k\,{}_n m_x + 6ak(n-k)\,{}_n m_x - ak(3n^2 - 6nk + 4k^2\,{}_n m_x^2)\right]$$

حيث $a = 0.008$. لذلك يلزمنا التأكد من أن هاتين الصيغتين تنتج عنهما قيم متوافقة.

إذا قمنا بإيجاد المفكوك لكل من الصيغتين المذكورتين وحساب الفرق بينهما مع إهمال الحدود الصغيرة من الرتبة الثالثة فما فوق لوجدنا أن :

$$(20)\quad {}_k q_x^* - {}_k q_x \cong 6a^2 k(n-k)(n^2 - 3nk + 3k^2).\,{}_n m_x^2$$

ولقد حسبنا قيمة هذا الفرق لخمسة مستويات متفاوتة لمعدل الوفيات ${}_n m_x$ ولمختلف قيم k فحصلنا على النتائج التي يوضحها الجدول رقم (١).

الجدول رقم (١). قيم الفروق ${}_k q_x^* - {}_k q_x$ لعدة مستويات للمعدل ${}_n m_x$ ولمختلف قيم k.

k	${}_n m_x = 0.05$	${}_n m_x = 0.10$	${}_n m_x = 0.15$	${}_n m_x = 0.20$	${}_n m_x = 0.25$
1	0.00005	0.00020	0.00045	0.00080	0.00125
2	0.00004	0.00016	0.00036	0.00065	0.00101
3	0.00004	0.00016	0.00036	0.00065	0.00101
4	0.00005	0.00020	0.00045	0.00080	0.00125
5	0.	0.	0.	0.	0.

ويتبين لنا من الجدول رقم (١) أن نتائج الصيغة المعممة في هذه الدراسة (١٧) تتفق تماما مع نتائج الصيغة التي توصلنا إليها في دراستنا السابقة (١٩) حيث إن الفروق بينهما في حدود ٠,٠٠١ من أجل مستوى عال لمعدل الوفيات يبلغ ٠,٢٥ وهي أقل من ذلك بكثير لمعدلات وفيات ذات مستوى منخفض.

تركيب وتدريج جداول الحياة المختصرة

١- حالة معظم فئات الجدول

إذا استثنينا فئات الأعمار الصغيرة والأعمار الكبيرة - سوف يتم بحث هذه الفئات الخاصة في الفقرة التالية- فإن الفئة العمرية [x, x + n] تسبقها الفئة العمرية [x - n, x] وتليها الفئة العمرية [x + n, x + 2n] ويمكننا أن نعتبر القيمة التقريبية التالية :

$$(l_n\,{}_n m_x)' \cong \frac{1}{2n}\left[l_n\,{}_n m_{x+n} - l_n\,{}_n m_{x-n}\right]$$

أي أن :

$$(l_{n\;n}m_x)' \cong \frac{1}{2n} l_n \left(\frac{{}_n m_{x+n}}{{}_n m_{x-n}} \right) \qquad (٢١)$$

وبعد التبديل في العلاقة (١٤) نجد أن :

$$ {}_k q_x = k.\;{}_n m_x (1+\Delta) \left\{ 1 + \frac{n}{2}\,{}_n m_x + \frac{n^2}{12}\,{}_n m_x \left[{}_n m_x - \frac{1}{2n} \quad l_n \left(\frac{{}_n m_{x+n}}{{}_n m_{x-n}} \right) \right] \right\}^{-1} \qquad (٢٢)$$

حيث Δ تحقق العلاقة التالية :

$$\Delta = \frac{n-k}{2} \left(1 + \frac{n-2k}{6}\,{}_n m_x \right) \left[{}_n m_x - \frac{1}{2n} \quad l_n \left(\frac{{}_n m_{x+n}}{{}_n m_{x-n}} \right) \right] \qquad (٢٣)$$

والعلاقة (٢٢) مع العلاقة (١٢) تساعدان في تركيب وتدريج جميع الفئات العمرية المتوسطة، حيث بذلك يمكننا تدريج الفئة العمرية من x إلى x + n باستخدام معدلات الوفيات المركزية لثلاث فئات عمرية : المعدل الخاص بنفس الفئة ومعدل الفئة العمرية التي قبلها ومعدل الفئة العمرية التي بعدها.

٢- الفئات الخاصة بالأعمار الصغيرة والأعمار الكبيرة

إن التقريب الذي اعتمدناه في العلاقة (٢١) لا يمكن استخدامه في هذه الفئات الخاصة ويمكن الاستعاضة عنه كما في الحالات التالية :

(أ) الفئة العمرية الأولى

إن الفئة العمرية الأولى لا يمكن تدريجها باستخدام العلاقة (٢١) نظرا لعدم وجود فئة عمرية سابقة لها. وحيث إن بيانات هذه الفئة غير موزعة بانتظام على أعمارها المختلفة فهي تحتاج لمعالجة خاصة. في الواقع فإننا نجد أن معظم جداول الحياة يفضل تجزئة الفئة العمرية الأولى إلى فئتين جزئيتين تخصص أولاهما للسنة الأولى من العمر فقط، بينما تخصص الثانية لما تبقى من الفئة. لنفرض أن (m_o) هو معدل الوفيات المركزي الخاص بالسنة الأولى من العمر وأن (${}_{n-1}m_1$) هو معدل الوفيات المركزي الخاص بالفئة الجزئية الثانية.

إن عدد الأحياء في نهاية السنة الأولى من العمر يعطى بالعلاقة التالية [١]:

$$\ell_1 = \ell_o (1 - \delta m_o) \left[1 + (1-\delta) m_o \right]^{-1} \qquad (٢٤)$$

حيث δ ثابتة، قيمها محصورة ما بين ٠,١٥ و٠,٣٠ ويمكننا إن نختار لها القيمة المتوسطة التالية:

$$\delta = 0.20 \tag{٢٥}$$

كما يمكننا أن نعتمد في هذه الفئة التقريب التالي [١]:

$$(l_n\ {}_{n-1}m_1)' \cong \frac{2}{2n-1}\, l_n\left(\frac{{}_n m_n}{{}_{n-1}m_1}\right) \tag{٢٦}$$

والعلاقة (١٤) تصبح من أجل x = 1 بالصورة التالية:

$$ {}_k q_1 = k.\ {}_{n-1}m_1(1+\Delta_1)\left\{1+\frac{n-1}{2}\ {}_{n-1}m_1+\frac{(n-1)^2}{12}\ {}_{n-1}m_1\left[{}_{n-1}m_1-\frac{2}{2n-1}\ l_n\left(\frac{{}_n m_n}{{}_{n-1}m_1}\right)\right]\right\}^{-1} \tag{٢٧}$$

بفرض أن:

$$\Delta_1=\frac{n-k-1}{2}\left(1+\frac{n-2k-1}{6}\ {}_{n-1}m_1\right)\left[{}_{n-1}m_1-\frac{2}{2n-1}\, l_n\left(\frac{{}_n m_n}{{}_{n-1}m_1}\right)\right] \tag{٢٨}$$

وهكذا باستخدام العلاقة (٢٧) مع العلاقة (١٢) يمكننا تركيب وتدريج الفئة الجزئية الثانية من الفئة العمرية الأولى.

(ب) الفئة العمرية الثانية

إن الفئة العمرية الثانية، وهي فئة الأعمار [n, 2n] تسبقها الفئة العمرية الشاذة في الطول [1, n] وتليها الفئة العمرية [2n, 3n].

ويمكننا أن نعتمد في هذه الحالة على التقريب التالي [١]:

$$(l_n\ {}_n m_n)' \cong \frac{2}{4n-1}\, l_n\left(\frac{{}_n m_{2n}}{{}_{n-1}m_1}\right) \tag{٢٩}$$

والعلاقة (١٤) تصبح في هذه الحالة كما يلي:

$$ {}_k q_n = k.\ {}_n m_n(1+\Delta_2)\left\{1+\frac{n}{2}\ {}_n m_n+\frac{n^2}{12}\ {}_n m_n\left[{}_n m_n-\frac{2}{4n-1}\ l_n\left(\frac{{}_n m_{2n}}{{}_{n-1}m_1}\right)\right]\right\}^{-1} \tag{٣٠}$$

بفرض أن:

$$\Delta_2=\frac{n-k}{2}\left(1+\frac{n-2k}{6}\ {}_n m_n\right)\left[{}_n m_n-\frac{2}{4n-1}\ l_n\left(\frac{{}_n m_{2n}}{{}_{n-1}m_1}\right)\right] \tag{٣١}$$

وباستخدام العلاقة (٣٠) مع العلاقة (١٢) يمكننا تركيب وتدريج الفئة العمرية الثانية.

(جـ) الفئة العمرية الأخيرة

إن الفئة العمرية الأخيرة في جدول الحياة المختصر تكون مفتوحة، وهي تشمل جميع الأعمار التي تزيد على العمر الأخير في جدول الحياة المختصر. وحيث إن بيانات الفئة المفتوحة لا يمكن التكهن بتوزيعها على أعمار الفئة، فبالتالي لا يمكن تدريج بيانات هذه الفئة. وأما الفئة العمرية التي تسبقها وهي الفئة العمرية الأخيرة النظامية في جدول الحياة المختصر فإنها تحتاج لمعالجة خاصة أيضا نظرا لعدم وجود فئة عمرية نظامية لاحقة لها، مما يجعل استخدام العلاقة (٢١) متعذرا في هذه الحالة.

ولما كان باستطاعتنا الاستعاضة عن التقريب المعطى بالعلاقة (٢١) في هذه الفئة العمرية بالتقريب التالي:

$$(l_{n\,n}m_x)' \cong \frac{1}{n} l_n\left(\frac{{}_nm_x}{{}_nm_{x-n}}\right) \qquad (٣٢)$$

وبالرجوع للعلاقة (١٤) نجد أن الصيغة المناسبة لهذه الفئة العمرية هي التالية:

$$ {}_kq_x = k.\,{}_nm_x(1+\theta)\left\{1+\frac{n}{2}\,{}_nm_x + \frac{n^2}{12}\,{}_nm_x\left[{}_nm_x - \frac{1}{n}\quad l_n\left(\frac{{}_nm_x}{{}_nm_{x-n}}\right)\right]\right\}^{-1} \qquad (٣٣)$$

بفرض أن:

$$\theta = \frac{n-k}{2}\left(1+\frac{n-2k}{6}\,{}_nm_x\right)\left[{}_nm_x - \frac{1}{n}\quad l_n\left(\frac{{}_nm_x}{{}_nm_{x-n}}\right)\right] \qquad (٣٤)$$

وهكذا باستخدام العلاقتين (١٢) و(٣٣) يمكننا تركيب وتدريج الفئة العمرية الأخيرة.

تطبيقات عدديـــة

١- تطبيق عددي لتركيب جدول الحياة

لتقييم نتائج هذا البحث أخذنا أحد جداول الحياة المختصرة التي قام بإعدادها الدكتور عابد [٩] لكل من الذكور والإناث من سكان المملكة العربية السعودية ولأربعة مستويات مختلفة لمعدل الوفيات الخام وطبقنا بيانات هذا الجدول مع الصيغ الواردة في هذا البحث بهدف مقارنة نتائج هذه الدراسة مع نتائج دراسة الدكتور عابد. إن الجدول رقم (٢) يوضح معدلات الوفيات المركزية التي اختارها الدكتور عابد لتمثيل وفيات الإناث من

سكان المملكة العربيـة السـعودية ، حيـث يبلـغ العمـر المتوقـع عنـد الميـلاد بمقتضاهـا ٦٢,٥٤ سنة.

الجدول رقم (٢). معدلات الوفيات المركزية للسكان الإناث في المملكة العربية السعودية.

المعدل	العمر	المعدل	العمر	المعدل	العمر	المعدل	العمر
٠,٠٦٣٤٦	٧٠	٠,٠١٠٣٧	٤٥	٠,٠٠١٧٣	٢٠	٠,٠٢٣٥٧	٠
٠,٠٩١٠٠	٧٥	٠,٠١٥٠١	٥٠	٠,٠٠٢٤٨	٢٥	٠,٠١٠٥٠	١
٠,١٣٠٤٨	٨٠	٠,٠٢١٥٢	٥٥	٠,٠٠٣٥٥	٣٠	٠,٠٠١٠٥	٥
٠,١٨٧١٠	٨٥	٠,٠٣٠٨٦	٦٠	٠,٠٠٥٠٩	٣٥	٠,٠٠٠٨٤	١٠
٠,٢٦٨٢٩	٩٠	٠,٠٤٤٢٦	٦٥	٠,٠٠٧٣٠	٤٠	٠,٠٠١٢٠	١٥

لقد قمنا بتركيب جدول الحياة المختصر انطلاقا من معـدلات الوفيـات الموضحـة في الجدول رقم (٢) وباستخدام نتائج هذا البحث وقارناها بنتـائج الدكتـور عـابد المستنـدة إلى برنامج الحاسب الآلي (LIFTB) من مجموعـة برامـج Mort Pak-Lit المعتمـدة مـن هيئـة الأمـم المتحدة.

فبافتراض أن ℓ_0=100,000 وانطلاقا مـن بيانـات الجـدول رقـم (٢) يمكننـا تركيـب جدول الحياة المختصر بالطريقتين التاليتين :

(أ) باستخدام البرنامج (LIFTB).

(ب) باستخدام الصيغ التي توصلنا إليها في هذا البحث وذلك على النحو التالي :

- الصيغة (٢٤) في حساب ℓ_1
- الصيغة (٢٧) في حساب ℓ_5
- الصيغة (٣٠) في حساب ℓ_{10}
- الصيغة (٢٢) في حساب كل من ℓ_{15} ℓ_{90}
- الصيغة (٣٣) في حساب ℓ_{90}

إن الجدول رقم (٣) يوضح النتائج التي توصلنا إليها كما يوضح قيمة x^2_{ob} .

الجدول رقم (٣). مقارنة عدد الأحياء باستخدام نتائج البحث مع نتائج برنامج الحاسب الآلي **(LIFTB)**.

عدد الأحياء		العمـــر
نتائج البحث	نتائج (LIFTB)	
١٠٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠	٠
٩٧٦٨٧	٩٧٦٩١	١
٩٣٦٩٧	٩٣٦٩٣	٥
٩٣٢٠٧	٩٣٢٠٣	١٠
٩٧٨١٦	٩٢٨١٢	١٥
٩٢٢٦١	٩٢٢٥٧	٢٠
٩١٤٦٦	٩١٤٦٢	٢٥
٩٠٣٣٨	٩٠٣٣٥	٣٠
٨٨٧٤٨	٨٨٧٤٤	٣٥
٨٦٥١٦	٨٦٥١٣	٤٠
٨٣٤١٢	٨٣٤٠٩	٤٥
٧٩١٩١	٧٩١٨٨	٥٠
٧٣٤٥٣	٧٣٤٥٠	٥٥
٦٥٩٣٧	٦٥٩٣٤	٦٠
٥٦٤٦٨	٥٦٤٦٥	٦٥
٤٥١٩١	٤٥١٨٩	٧٠
٣٢٨٠٣	٣٢٨٠١	٧٥
٢٠٦٧٩	٢٠٦٧٨	٨٠
١٠٦٢٧	١٠٦٢٦	٨٥
٤٠٥٤	٤٠٥٤	٩٠
٩٩٩	١٠٠٠	٩٥

$$\chi^2_{ob} = 0.0034$$

$$\chi^2_{0.01,20} = 37.566$$

يتضح من الجدول رقم (٣) أن الفروق بين القيم المحسوبة وفق نتائج هذا البحث والقيم المحسوبة وفق برنامج (LIFTB) هي فروق غير دالة بمستوى معنوية ١٪ حيث بلغت القيمة الجدولية $\chi^2_{0.01,20} = 37.566$ وبالتالي فانه يوجد توافق بين المجموعتين بدرجة ثقة ٩٩٪.

٢- تطبيق عددي لتدريج جدول الحياة

إن الجدول رقم (٤) يوضح القيم التي حصلنا عليها عند تدريج البيانات لثلاث فئات عمرية من جدول الحياة المختصر الوارد في الجدول رقم (٣) بالطريقتين التاليتين :

(أ) باستخدام العلاقة (١٧).

(ب) باستخدام العلاقات (٣٠)، (٢٢)، (٣٣).

كما يوضح الجدول (٤) أيضا قيم χ^2_{ob} للبيانات الواردة في كل فئة من الفئات الثلاث. ويتضح من ذلك أن النتائج هي أيضا نتائج جيدة بدرجة ثقة ٩٩٪. حيث بلغت القيمة الجدولية $\chi^2_{0.01,5} = 15.086$

الجدول رقم (٤). تدريج البيانات لبعض فئات جدول الحياة المختصر باستخدام نتائج البحث.

الفئة العمرية [٩٠، ٩٥]			الفئة العمرية [٤٥، ٥٠]			الفئة العمرية [٥، ١٠]		
الصيغة (٣٣)	الصيغة (١٧)	العمر	الصيغة (٢٢)	الصيغة (١٧)	العمر	الصيغة (٣٠)	الصيغة (١٧)	العمر
٤٠٥٤	٤٠٥٤	٩٠	٨٣٤١٢	٨٣٤١٢	٤٥	٩٥٦٩٧	٩٣٦٩٧	٥
٣١٧١	٣١٩٨	٩١	٨٢٦٧٣	٨٢٧١٣	٤٦	٩٣٥٤٢	٩٣٦١٨	٦
٢٤٥٧	٢٤٩١	٩٢	٨١٨٨٠	٨١٩٤٠	٤٧	٩٣٤٢٢	٩٣٥٢٩	٧
١٨٧٨	١٩٠٤	٩٣	٨١٠٣٥	٨١٠٩٥	٤٨	٩٣٣٢٤	٩٣٤٣١	٨
١٤٠٣	١٤٠٨	٩٤	٨٠١٣٩	٨٠١٧٧	٤٩	٩٣٢٥٢	٩٣٣٢٣	٩
٩٩٩	٩٧٦	٩٥	٧٩١٩١	٧٩١٨٩	٥٠	٩٣٢٧	٩٣٢٦	١٠
$\chi^2_{ob} = 1.607$			$\chi^2_{ob} = 0.126$			$\chi^2_{ob} = 0.353$		

خاتمـــــة

استعرضنا في هذا البحث الطريقة الديمغرافية لتركيب جداول الحياة المختصرة انطلاقا من معدلات الوفيات المركزية التي يمكن إيجادها باستخدام التوزيع العمري للسكان والتوزيع العمري للوفيات، ومن المعروف أن التوزيع الأول نحصل عليه من بيانات التعداد العام للسكان بينما التوزيع الثاني نحصل عليه من إحصاءات الوقائع الحيوية.

وحيث إن البيانات في التوزيعين المذكورين تكون مجمعة بفئات عمرية خمسية (أو عشرية) وقد يحتاج الباحثون لإعادة تبويب هذه البيانات في مجموعات عمرية أصغر أو إعادة تبويبها لآحاد الأعمار فهم يحتاجون بالضرورة لتدريج بيانات جدول الحياة المختصر.

ولقد قام الباحث بتعميم علاقة جريفل لتركيب جداول الحياة المختصرة وتدريج بياناتها لآحاد الأعمار وتوصل إلى صيغ عملية في هذا المجال تتميز بأن نتائجها أكثر تدرجا وبشكل نموذجي، لأنها تعتمد على المعادلات الرياضية التي تم التوصل إليها من خلال البحث.

وعند تطبيق الطريقة المقترحة على بيانات مستمدة من البيانات السكانية للمملكة العربية السعودية، وجد الباحث أن طريقته تعطي نتائج جيدة جدا سواء في تركيب جدول الحياة المختصر أو في تدريج بعض فئاته العمرية.

ولقد كانت نتائج البحث متفقة تماما مع نتائج الدراسات السابقة، فباستخدام اختبار كاي مربع كانت الفروق بين الطريقتين غير دالة بمستوى معنوية ١٪ وبالتالي فالنتائج متوافقة بدرجة ثقة ٩٩٪.

المراجــــع

[١] اليوسف، محمود. "جداول الحياة المختصرة- طريقة جديدة في التركيب والتدريج، تعميم علاقة ريد وميريل". *مجلة العلوم الاقتصادية والإدارية*، ١٣، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة الإمارات العربية المتحدة. (مقبول للنشر).

[٢] *J.* Contructing *Inst. Actuaries*, 48 (1914), 294.

[٣] Reed, J. L. and Merrell Contructing an Abrideged Life *Amer. J. Hyg.* 30 (1939), 33-62.

[٤] Grevill Contructing Abridged Life Tables *Amer. Inst. Actuaries*, 32 (1943), 29-43.

[٥] الشلقاني، مصطفى. *تدريج البيانات وإعداد الجداول الديموجرافية*. الكويت: ذات السلاسل، ١٩٨٥م.

[٦] Elandt-Johnson, R.C and Johnson, N.L. *Survival Models and Data Analysis*. New-York: John Wiley, 1980.

[٧] Shryock, H.S., Siegel, J. and Associates. *The Methods and Materials in Demography*. U.S. Department of Commerce, Washington, D.C., 1973.

[٨] Keyfitz, N. *Applied Mathmatical Demographiy*. Newyork: John Wiley, (1977) .

[٩] عابد، أحمد بن درويش. "إعداد جداول حياة مختصرة للسكان السعوديين لكل من الذكور والإناث". *مجلة جامعة الملك سعود*، م٥، *العلوم الإدارية* (٢)، (١٤١٣هـ/١٩٩٣م)، ٣٦١-٣٨٦.

Toward a Generalization of Greville Formula-construction and Graduation Abridged Life Tables

M. H. Al-Yousef

Professor, Department . of Quantitative Methods, College of Administrative Sciences, Riyadh, Saudi Arabia, King Saud University

(Received 17/8/1419H; accepted for publication 13/10/1420H)

Abstract. In This paper we generalize the Greville formula for constructing abridged life tables. The proposed formula is used to construct and graduate abridged life table from the age specific death rates for a 5- year interval. We use the chi-square criterion to compare the results of suggested method with the survivors numbers in a life table. It seems reasonable to accept the results of this work.