بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة في المعادلات التفاضلية العادية

طرق تحليلية وعددية

تأليف

Martin Hermann Masoud Saravi

ترجمة

د. محمد مطاوع خشان

الأستاذ المشارك بقسم العلوم الأساسية

عمادة السنة الأولى المشتركة – جامعة الملك سعود

دار جامعة الملك سعود للنشر
KING SAUD UNIVERSITY PRESS

ص.ب ٦٨٩٥٣ - الرياض ١١٥٣٧ المملكة العربية السعودية

ح دار جامعة الملك سعود للنشر، ١٤٤٣هـ (٢٠٢٢م)

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

هيرمان، مارتن.

مقدمة في المعادلات التفاضلية العادية، طرق تحليلية وعددية/ مارتن هيرمان، محمد مطاوع خشان. - الرياض، ١٤٤٣هـ.

٣٤٧ص؛ ١٧سم × ٢٤ سم

ردمك: ٩-٩٩٦-٥٠٧-٦٠٣-٩٧٨

١- المعادلات التفاضلية ٢- التفاضل والتكامل أ. سارافي، مسعود (مؤلف مشارك)

ب. خشان، محمد مطاوع (مترجم) ج. العنوان

ديوي ٥١٥,٣٥٢ ١٤٤٣ / ٢٥٩

رقم الإيداع: ١٤٤٣/ ٢٥٩

ردمك: ٩-٩٩٦-٥٠٧-٦٠٣-٩٧٨

هذه ترجمة عربية محكمة صادرة عن مركز الترجمة بالجامعة لكتاب:

A First Course in Ordinary Differential Equations

By: Martin Hermann, Masoud Saravi

وقد وافق المجلس العلمي على نشرها في اجتماعه التاسع عشر للعام الدراسي ١٤٤٢، المعقود بتاريخ ١١/ ١٠/ ١٤٤٢هـ، الموافق ٢٣/ ٥/ ٢٠٢١ م.

جميع حقوق النشر محفوظة. لا يسمح بإعادة نشر أي جزء من الكتاب بأي شكل وبأي وسيلة سواء كانت إلكترونية أو آلية بما في ذلك التصوير والتسجيل أو الإدخال في أي نظام حفظ معلومات أو استعادتها بدون الحصول على موافقة كتابية من دار جامعة الملك سعود للنشر.

دار جامعة الملك سعود للنشر
KING SAUD UNIVERSITY PRESS

مقدمة المترجم

كثيرًا هو الذي كُتبَ عن المعادلات التفاضلية، وكثيرًا هي المؤلفات في هذا العلم. ورغم ذلك، لا يزال المؤلفون يؤلفون فيه والناشرون ينشرون. والسبب في ذلك يعود أولاً إلى أن علم المعادلات التفاضلية علم دائم الاتساع، وثانياً إلى مدى حيويته وتفاعله ورفده للعلوم التطبيقية على اختلافها، من فيزياء وكيمياء وهندسة واقتصاد وغيرها من العلوم الكثير، حتى وصلت تطبيقاته إلى العلوم الاجتماعية.

كثيرة هي الأسباب التي تدعو مؤلفاً إلى التأليف في موضوع تم التأليف فيه سابقاً. منها، محاولته اقتراح مقاربة جديدة في طرح الموضوع، أو امتلاكه إضافة ما، لم تطرح سابقاً، أو عرضه للموضوع بأسلوب جديد، كأن تكون لغة الكتاب أسهل أو أكثر تخصصاً. بالنسبة لكتابنا هذا، فلا أبالغ إذا قلت إنه جمع كل الأسباب التي تدعو إلى تأليفه. فنرى أن مؤلفيه قد أضافا إليه مقاربة تحليلية وعددية للمعادلات التفاضلية بلغة متخصصة ولكن سهلة، مدعمين هذه المقاربة بالعديد من الأمثلة والتمارين. وهذا من أهم ما يميز هذا الكتاب. كذلك، فإن هذا الكتاب جاء كمشروع بحثي بين جامعتين، فلقي، كما سيلاحظ القارئ، دقة وعناية واحترافية في عرض المحتوى. لن أطيل عليكم في وصف الكتاب، ليكمل عني مؤلفاه هذه المهمة من خلال مقدمتهم التي تصف محتواه.

لقد اعتمدت في ترجمة المصطلحات العلمية، في معظمها، على قاموس العلوم الرياضية للدكتور فوزي الذكير والدكتور معروف سمحان، من منشورات جامعة الملك سعود، وعلى ما هو سائد ومتداول في معظم الترجمات العربية لكتب المعادلات التفاضلية.

أود الإشارة إلى التزامي بذكر الاختصار باللغة الإنجليزية لبعض المصطلحات، عند وروده للمرة الأولى على الأقل، محاكاة للكتاب المترجم والتزامًا باللغة العلمية التي تفضل ذكر الاختصار لبعض المفاهيم العلمية المشهورة. وتسهيلًا على القارئ، فقد قمت بإدراج قائمة بهذه الاختصارات ومعانيها في آخر الكتاب.

جاء المحتوى في ثمانية فصول. نترك عناوينها لمقدمة الكتاب وتفاصيلها إلى متنه.

ما أحوجنا كأمة عربية إلى الترجمة في كل فروع العلوم؛ لأنه لا علم راسخ ولا معرفة أصيلة ولا تقدم حقيقي على مستوى أمة إذا لم تُدَرّس هذه الأمة نشأها بلغة أمتها. إذا آمنا بهذه البديهة فسندرك مباشرة مدى فقر المكتبة العربية إلى كتب بلغتها!. وإنني أدعو من خلال هذه المقدمة جميع مؤسسات وهيئات وشركات الوطن العربي الكبير، حكومية كانت أو خاصة، على دعم الترجمة والمترجمين من أساتذة جامعيين ومتخصصين، لنؤسس أرضية معرفية مقبولة تمكن الأجيال القادمة من الوقوف عليها للانطلاق إلى مستقبل معرفي مُحكم لا مستقبل لأمة بدونه. وكم نتطلع إلى ذلك اليوم الذي تكون فيه كل العلوم بجميع فروعها وتفاصيلها مكتوبة بلغة عربية.

أختم هذه المقدمة برجاء؛ أرجو من القارئ الكريم أن يوافيني بكل ملاحظة من أي نوع كانت، نضيف من خلالها أو نوضح بواسطتها أو ننقح بها هذه الترجمة، ليصبح هذا العمل عملاً متكاملاً محكماً، نصل من خلاله إلى تطوير هذا الكتاب واعتماده كمرجع رياضي عربي يُعتمد عليه، ولا يتأتى التكامل والإحكام إلا بالمشاركة والإتقان. أستقبل ملاحظاتكم على البريد الإلكتروني drmohammedr@yahoo.com.

المترجم

الرياض

٢٠٢١-٠٩-٢١

مقدمة المؤلفين

يعتبر هذا الكتاب كمقدمة في التقنيات الرياضياتية الحديثة المستخدمة لحل مسائل القيمة الابتدائية والحدية في المعادلات التفاضلية العادية الخطية (ODEs). إن ما يجعل هذا الكتاب جذابا بشكل خاص، هو تركيزه على الطرق التحليلية والعددية في حل هذه المسائل.

تلعب المعادلات التفاضلية العادية (ODEs) دورًا مهمًا في نمذجة العمليات والظواهر العلمية، التكنولوجية والاقتصادية المعقدة. ولذلك، ولمخاطبة الطلاب والعلماء من مختلف الاختصاصات، فقد تحايلنا على الشكل التقليدي للتعريف- النظرية- البرهان. وبدلاً من ذلك، قمنا بوصف الإطار الرياضياتي عن طريق مجموعة متنوعة من المسائل والأمثلة والتمارين التي تتراوح من المسائل السهلة إلى المسائل الصعبة.

صُمم هذا الكتاب ليكون مادة أولية للمقررات التي تتناول نظرية المعادلات التفاضلية العادية، ومُعالجاتها العددية لطلاب المرحلة الجامعية المتقدمة وبدايات مرحلة الدراسات العليا. ولقد افترضنا أن القارئ على دراية بالتفاضل والتكامل، على وجه الخصوص طرق التكامل، والتحليل العددي. أيضاً، الفيزيائيون، الكيميائيون، علماء الأحياء، علماء الكمبيوتر، والمهندسون والذين ينطوي عملهم على حل المعادلات التفاضلية العادية سيجدون الكتاب مفيداً لهم كمرجع وكأداة للدراسة الذاتية. تم إعداد هذا الكتاب في نطاق مشروع بحثي ألماني- إيراني حول الطرق الرياضياتية لحل مسائل المعادلات التفاضلية العادية، والذي بدأ مطلع العام٢٠١٢ .

سنعرض الآن المحتوى العام للكتاب. ضم الفصل الأول مقدمة عن المعادلات التفاضلية العادية ODEs وبعض المفاهيم الأساسية. تناول الفصل الثاني المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة العددية الأولى، ودرَس وجود ووحدانية الحل بناء على النظريات المعروفة لبيانو Peano وبيكارد- لينداولوف Picard- Lindelof. وعرض هذا الفصل الأساليب القياسية التحليلية لتحديد الحل

الصحيح. كذلك، ناقشنا حل المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى بدرجات عُليا (معادلة كليروت Clairaut و لاجرانج Lagrange) والتي غالباً ما تواجهنا في المسائل التطبيقية، وينتهي هذا الفصل بمناقشة عائلة المنحنيات والمسارات العمودية. خُصص الفصل الثالث للطرق التحليلية لحل المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الثانية. واستمراراً لمقدمتنا عن المعادلات التفاضلية العادية من الرتب العليا، عرضنا طرق حل المعادلات المتجانسة وغير المتجانسة. يركز الفصل الرابع على تحويل لابلاس Laplace للمعادلات التفاضلية العادية ذات الحلول العددية، والذي استخدمناه أيضاً في الفصل الخامس لإيجاد حل أنظمة المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى. تحويل لابلاس هو تحويل مطبق على نطاق واسع في الرياضيات، ويستخدم لتحويل مجال دالة من مجال زمني إلى مجال آخر s. يمكن استخدام تحويل لابلاس في بعض الحالات لحل المعادلات التفاضلية العادية الخطية بشروط ابتدائية معينة. في نهاية الفصل الخامس، يتضح كيف يمكن تحديد حل النظام المتجانس على أساس القيم الذاتية للمعادلة المميزة. ثم يتم تطوير حل النظام غير المتجانس من خلال طريقة تغيير الوسائط (الباراميترات)، ويتم تقديم حل المعادلة التفاضلية العادية من خلال مبدأ التراكب أو التطابق. في الفصل السادس، بيَّنا كيف يمكن استخدام متسلسلات القوى لإعطاء حل عددي للمعادلات التفاضلية العددية من الرتب الأولى والثانية. وأعطينا اهتماماً خاصاً بمعادلة لجندر Legendre، ومعادلة بسل Bessel، والمعادلة فوق الهندسية؛ لأن هذه المعادلات غالباً ما تظهر في التطبيقات. الجزء العددي من الكتاب يبدأ مع الفصل السابع. يدرس هذا الفصل الطرق العددية لحل أنظمة المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى بقيمة ابتدائية. نبدأ هذا الفصل بتقديم مفهوم حل المعادلات التفاضلية العادية التقريبي من خلال طريقة رونجا-كوتا Runge-Kutta، وبعدة أساليب مختلفة. كذلك ناقش هذا الفصل مواضيع أخرى مثل وجود الحل، التقارب، تقدير الخطأ، تعديل حجم الخطوة، الاستقرار، والصلابة. أخيراً، يركز الفصل الثامن على طرق القنص لحل المعادلات التفاضلية العادية الخطية بقيم نقطتين حديتين. وقمنا في هذا الفصل بدراسة الطرق العددية التالية بالتفصيل: طريقة القنص البسيطة، طريقة القنص المتعددة، طريقة الدوال التكميلية، وطريقة الزحف المستقر لحل المعادلات التفاضلية العادية بشروط حدية منفصلة جزئية.

نود أن نعرب عن شكرنا لزملائنا الذين دعموا عملنا الألماني - الإيراني المشترك من خلال نقدهم وتشجيعهم، بشكل خاص الدكتور أوميد جاليلي Dr. Omid Jalili (IAU ، فرع نور) لمناقشتنا في معظم المسائل الفيزيائية، وكذلك الدكتور ديتر كايزر Dr. Dieter Kaiser (FSU Jena) لمساعدته لنا في البرمجيات.

لقد كان من دواعي سرورنا العمل مع موظفي النشر في Springer India، خاصة السيد شميم أحمد Mr. Shamim Ahmad والسيدة نوبور سينغ Ms. Nupoor Singh.

أخيرًا، يرغب المؤلفان في التأكيد على أن أي اقتراح أو تعليق مفيد لتحسين هذا الكتاب سيكون موضع تقدير كبير، ويمكن إرساله عن طريق البريد الإلكتروني إلى:

martin.hermann@uni-jena.de و masoud@saravi.info

نور، إيران مسعود سرافي

جينا، ألمانيا مارتن هيرمان

نبذة عن المؤلفين

مارتن هيرمان (MARTIN HERMANN): يعمل أستاذاً للرياضيات العددية في جامعة فريدريك سكيلرFriedrich Schiller University (FSU) ، ألمانيا. تتركز أنشطته واهتماماته البحثية في مجال الحوسبة العلمية والتحليل العددي للمعادلات التفاضلية العادية المعتمدة على مَعلمات غير خطية (ODE). وهو أيضًا مؤسس المركز متعدد التخصصات للحوسبة العلمية (١٩٩٩)، والذي يعمل فيه علماء معاً من مختلف الكليات في مجالات الرياضيات التطبيقية وعلوم الكمبيوتر والتطبيقات. يترأس منذ العام ٢٠٠٣ مشروعًا تعاونيًا دوليًا مع معهد الرياضيات في الأكاديمية الوطنية للعلوم في كييف بأوكرانيا، كما درَّس، على سبيل المثال، تدفق السوائل في الخزانات. كذلك منذ عام ٢٠٠٣، عمل الدكتور "هيرمان" أمينًا لكوليجيوم يوروبيان جينينس Collegium Europaeum Jenense في جامعته، وكان أول رئيس لأصدقائها. بالإضافة إلى أنشطته المهنية، فإنه يتطوع في العديد من المنظمات والجمعيات. في البلدان الناطقة بالألمانية، تعد كتبه في الرياضيات العدديّة والمعالجة العدديّة للمعادلات التفاضلية بقيم ابتدائية من ضمن أفضل الكتب في التحليل العددي. له ما يزيد عن ٧٠ بحثًا منشورًا في مجلات محكَّمة.

مسعود سارافي (MASOUD SARAVI): يعمل أستاذاً للرياضيات في جامعة أزاد الإسلامية Islamic Azad University (IAU)، فرع نور، إيران. تتركز اهتماماته البحثية في التحليل العددي للمعادلات التفاضلية العادية (ODEs)والمعادلات التفاضلية الجزئية (PDEs) والمعادلات التكاملية، إضافة إلى اهتمامه بمواضيع المعادلات الجبرية التفاضلية (DAEs) والطرق الطيفية. كما نشر العديد من الأوراق البحثية مع زملاء له من ألمانيا، فإن للدكتور "سارافي" ما يزيد عن ١٥ ورقة بحثية

ناجحة في الرياضيات. الشعبية الجارفة لكتبه تعكس خبرة تدريسية تزيد على العشرين عاماً وأسلوباً بسيطاً ومنظماً في الكتابة. ويعمل حالياً كعضو مجلس إدارة في (IAU) ويعمل مع مجموعة التحليل العددي وكلية الرياضيات وعلوم الكمبيوتر في جامعة (FSU) بألمانيا. بدأ دراسته الأكاديمية في كلية دادلي التقنية بالمملكة المتحدة UK's Dudley Technical College قبل أن يحصل على أول درجة أكاديمية في الرياضيات والإحصاء من كلية العلوم التطبيقية بشمال لندن ودرجته الأكاديمية المتقدمة في التحليل العددي من جامعة برونيل Brunel University. بعد حصوله على درجة الماجستير في الرياضيات التطبيقية من جامعة أمير كبير Amir Kabir University في إيران، حصل على درجة الدكتوراة في التحليل العددي للمعادلات التفاضلية العادية والمعادلات التفاضلية الجبرية باستخدام طرق الطيف من الجامعة المفتوحة في المملكة المتحدة.

المحتويات
CONTENTS

مقدمة المترجم.....هـ
مقدمة المؤلفين.....ز
الفصل الأول: مفاهيم أساسية عن المعادلات التفاضلية ١
(١ , ١) مقدمة ١
(١ , ٢) بعض المصطلحات الأساسية ٢
(١ , ٣) حلول المعادلات التفاضلية ٤
(١ , ٤) تمارين.....٩

الفصل الثاني: المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى ١٣
(٢ , ١) مناقشة المسألة الرئيسية ١٣
(٢ , ٢) الحل التحليلي للمعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى ١٨
(٢ , ٣) المعادلات التفاضلية العادية ODEs من الرتبة الأولى والدرجات العليا..... ٣٧
(٢ , ٤) عائلة المنحنيات، المسارات المتعامدة..... ٤١
(٢ , ٥) تمارين ٤٥
المراجع ٥١

الفصل الثالث: المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية ٥٣
(١ ,٣) المعادلات التفاضلية الخطية ٥٣
(٢ ,٣) طرق حل المعادلات المتجانسة ٦٤
(١ ,٢ ,٣) طريقة اختزال الرتبة ٦٤
(٢ ,٢ ,٣) المعادلات التامة ٧١
(٣ ,٢ ,٣) المعادلات شبه التامة ٧٤
(٤ ,٢ ,٣) المعادلات بمعاملات ثابتة ٧٧
(٥ ,٢ ,٣) الصيغة المعيارية ٨٤
(٣ ,٣) طرق حل المعادلات غير المتجانسة ٨٥
(١ ,٣ ,٣) طريقة المعاملات غير المحددة ٨٦
(٢ ,٣ ,٣) طريقة تغيير الوسائط ٨٩
(٣ ,٣ ,٣) طريقة المؤثرات ٩٧
(٤ ,٣) تمارين ١٠٢
المراجع ١٠٧

الفصل الرابع: تحويلات لابلاس ١٠٩
(١ ,٤) مقدمة ١٠٩
(٢ ,٤) تحويل لابلاس ١١١
(٣ ,٤) تحويل لابلاس للدوال الدورية ١١٧
(٤ ,٤) تحويلات لابلاس للمشتقات والتكاملات ١٢١
(٥ ,٤) مشتقات وتكاملات تحويلات لابلاس ١٢٥
(٦ ,٤) نظرية الالتفاف والمعادلات التكاملية ١٢٩
(٧ ,٤) تمارين ١٣٢

الفصل الخامس: أنظمة المعادلات التفاضلية الخطية ١٣٧
(٥,١) مقدمة ١٣٧
(٥,٢) طرق الحذف ١٣٩
(٥,٢,١) الحذف باستخدام المؤثر D ١٣٩
(٥,٢,٢) الحذف باستخدام تحويلات لابلاس ١٤١
(٥,٣) طريقة رمز المصفوفة المتجهة ١٤٣
(٥,٣,١) القيم الذاتية الحقيقية البسيطة ١٤٥
(٥,٣,٢) القيم الذاتية الحقيقية المضاعفة ١٤٨
(٥,٣,٣) القيم الذاتية المركبة البسيطة ١٥٠
(٥,٤) حل نظام معادلات تفاضلية عادية غير متجانس ١٥١
(٥,٥) طريقة المعاملات غير المحددة ١٥٥
(٥,٦) تمارين ١٦٠
المراجع ١٦٤

الفصل السادس: حلول متسلسلات القوى ١٦٥
(٦,١) مقدمة ١٦٥
(٦,٢) مراجعة لمتسلسلات القوى ١٦٧
(٦,٣) متسلسلات الحلول حول نقطة عادية ١٧١
(٦,٤) متسلسلات الحلول حول نقطة منفردة منتظمة ١٧٧
(٦,٥) دوال خاصة ١٩٥
(٦,٥,١) معادلة لجندر ١٩٦
(٦,٥,٢) معادلة بِسِل ١٩٩
(٦,٥,٣) المعادلة فوق الهندسية ٢٠٣

(٦,٦) تمارين ٢٠٦
المراجع ٢١٢

الفصل السابع: طرق عددية لحل مسائل القيمة الابتدائية ٢١٣
(٧,١) مسائل القيمة الابتدائية ٢١٣
(٧,٢) تجزيء المعادلة التفاضلية العادية ٢١٥
(٧,٣) طرق رونجا- كوتا ٢١٧
(٧,٤) خطأ الاقتطاع المحلي والاتساق ٢٢٧
(٧,٥) إنشاء طرق رونجا- كوتا ٢٣٥
(٧,٦) طُرق رونجا- كوتا التجميعية والضمنية ٢٤١
(٧,٧) الخطأ العام والتقارب ٢٥٠
(٧,٨) تقدير خطأ التجزيء المحلي والتحكم بطول الخطوة ٢٥٢
(٧,٩) الاستقرار المطلق والصلابة ٢٥٧
(٧,١٠) تمارين ٢٦٦
المراجع ٢٧٦

الفصل الثامن: طرق القنص لحل مسائل القيمة الحدية الخطية ٢٧٩
(٨,١) مسائل القيمة الحدية بنقطتين ٢٧٩
(٨,٢) طريقة القنص البسيطة ٢٨٣
(٨,٣) طريقة الدوال المتممة ٢٨٩
(٨,٤) استقرار طريقة القنص البسيطة ٢٩٧
(٨,٥) طريقة القنص المتعددة ٢٩٩
(٨,٦) استقرار طريقة القنص المتعدد ٣٠٣

(٨,٧) المعالجة العددية للنظام الجبري الخطي ٣٠٦
(٨,٨) طريقة الزحف المستقرة ٣٠٧
(٨,٩) تمارين ٣١٥
المراجع ٣٢٠
ملحق A متسلسلات القوى ٣٢٣
ملحق B صيغ تكامل أساسية ٣٢٥
ملحق C جدول تحويلات لابلاس ٣٢٩
ثبت المصطلحات ٣٣١
أولًا: عربي- إنجليزي ٣٣١
ثانيًا: إنجليزي- عربي ٣٣٩
معاني أهم الاختصارات الواردة في الكتاب ٣٤٣
كشاف الموضوعات ٣٤٥